Op 17 september vond de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op de Technische Universiteit Eindhoven. De beste 25 deelnemers zullen worden uitgenodigd om een jaar lang intensief te trainen. Zij maken kans op een plaats in het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade in 2011, die zal plaatsvinden in Amsterdam. In dit artikel kijken we naar de tweede opgave van de onlangs gehouden finale.

■ door Raymond van Bommel

REEKSSOMMEN EN TWEEMACHTEN

Een positief geheel getal noemen we een *reekssom* als het te schrijven is als de som van een aantal (minstens twee) opeenvolgende positieve gehele getallen. Voorbeelden van reekssommen zijn 18 en 33, want 18 is te schrijven als $5 + 6 + 7$ en 33 is te schrijven als $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$, maar bijvoorbeeld ook als $16 + 17$. Een positief geheel getal is een *tweemacht* als het te schrijven is als 2^l voor een of andere gehele $l \geq 0$. De tweemachten zijn dus de getallen 1, 2, 4, 8, enzovoorts. Over reekssommen en tweemachten ging opgave 2 van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade:

> **Opgave 2 (NWO finale 2010):**
> a. Laat zien dat geen enkel positief geheel getal zowel een reekssom als een tweemacht is.
> b. Laat zien dat elk positief geheel getal een reekssom of een tweemacht is.

EERSTE STAPPEN Als eerste kijken we naar wat kleine voorbeelden en eigenschappen van reekssommen en tweemachten. Het is namelijk bij alle olympiadeopgaven nuttig om van alle dingen die in de opgave voorkomen kleine voorbeelden en simpele eigenschappen op te schrijven voordat je daadwerkelijk aan de opgave begint.

Kleine tweemachten zijn makkelijk gevonden; we hebben het rijtje 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, enzovoorts. Verder weten we dat de delers van tweemachten andere tweemachten zijn. In het bijzonder heeft een tweemacht geen oneven delers groter dan 1. Alle andere getallen hebben minstens één oneven priemfactor en dus wel een oneven deler groter dan 1.

Op de volgende pagina vind je een tabel met een aantal kleine reekssommen $m + (m + 1) + \cdots + (n - 1) + n$. Het getal aan de linkerkant geeft het eerste getal, m, van de reekssom aan en het getal aan de bovenkant het laatste getal, n. Verder weten we dat de som van een rij opeenvolgende getallen gelijk is aan het aantal getallen maal het gemiddelde van het eerste en het laatste getal. Zo hebben we bijvoorbeeld $5 + 6 + 7 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5 + 7) = 18$ en $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 + 8) = 33$ en $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (6 + 10) = 40$. In het algemeen geldt: $m + (m + 1) + \cdots + (n - 1) + n = (n - m + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (m + n)$.

HET EERSTE DEEL Het valt op dat bij de kleine voorbeelden van de formule telkens precies één van de factoren $n - m + 1$ en $m + n$ een oneven getal groter dan 1 is. We gaan proberen te bewijzen dat dit voor elke reekssom zo is. Omdat tweemachten geen oneven delers groter dan 1 hebben, hebben we dan bewezen dat alle reekssommen geen tweemachten zijn. Dat komt precies neer op deel a van de opgave.

Stel dat we een willekeurige reekssom, $m + (m + 1) + \cdots + (n - 1) + n = \frac{1}{2}(n - m + 1)(m + n)$, hebben. Het verschil tussen $n - m + 1$ en $m + n$ is $2m - 1$ en dat is oneven. Daaruit volgt dat precies één van de getallen $n - m + 1$ en $m + n$ oneven moet zijn. Omdat n groter is dan m (in de som zitten immers minstens twee getallen), kunnen we

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	–	3	6	10	15	21	28	36	45	55
2	–	–	5	9	14	20	27	35	44	54
3	–	–	–	7	12	18	25	33	42	52
4	–	–	–	–	9	15	22	30	39	49
5	–	–	–	–	–	11	18	26	35	45
6	–	–	–	–	–	–	13	21	30	40
7	–	–	–	–	–	–	–	15	24	34
8	–	–	–	–	–	–	–	–	17	27
9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	19

ook concluderen dat $n - m + 1$ en $m + n$ allebei groter dan 1 zijn. Doordat de factor $\frac{1}{2}$ maal de even factor een geheel getal is, heeft $\frac{1}{2}(n - m + 1)(m + n)$ dus altijd een oneven deler groter dan 1 en kan het daarom dus geen tweemacht zijn.

HET TWEEDE DEEL Om het tweede deel van de opgave op te lossen, gaan we proberen te bewijzen dat elk getal dat geen tweemacht is, een reekssom is. We proberen dus te laten zien dat elk getal dat een oneven deler groter dan 1 heeft een reekssom is. Laten we eens kijken of alle veelvouden van het oneven getal 7 in de tabel zitten. Het antwoord is vermoedelijk ja, er is namelijk een interessant patroon te zien: de veelvouden van 7 zitten op een systematische manier in de tabel (de rode getallen). De kleine veelvouden van 7 zijn op de volgende manier te schrijven: $7 = 3 + 4$, $14 = 2 + 3 + 4 + 5$ en $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.

In het algemeen kunnen we kleine veelvouden van een willekeurig oneven getal $2k + 1$ maken door te beginnen met $k + (k + 1)$ en aan beide uiteinden getallen toe te voegen totdat het juiste veelvoud bereikt is, net zoals dat bij 7 ging. Het grootste getal dat we op die manier kunnen maken, is $1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) + \cdots + (2k - 1) + 2k = \frac{1}{2} \cdot 2k(2k + 1) = k(2k + 1)$.

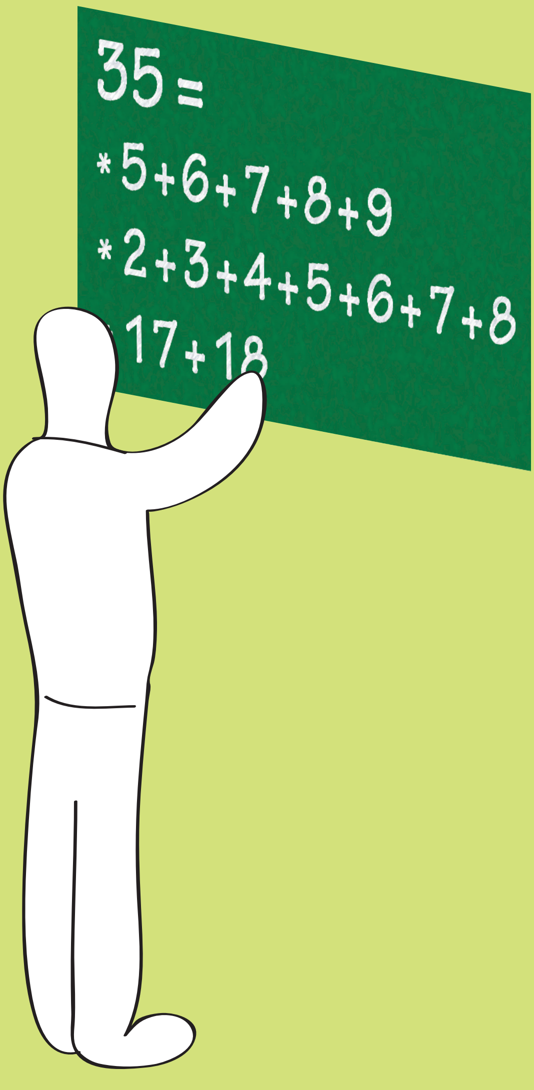
We hebben nu bewezen dat de veelvouden $1 \cdot (2k + 1), 2 \cdot (2k + 1), \ldots, k \cdot (2k + 1)$ van $2k + 1$ reekssommen zijn. Nu rest ons om te bewijzen dat de grotere veelvouden van $2k + 1$ ook reekssommen zijn. De grotere veelvouden van 7 zijn op de volgende manier te schrijven: $28 = 1 + \cdots + 7$, $35 = 2 + \cdots + 8$ en $42 = 3 + \cdots + 9$. Door steeds het linkergetal weg te halen en aan de rechterkant een getal toe te voegen, kunnen grotere veelvouden van 7 gemaakt worden. Dit gegeven kunnen we eenvoudig in een formulevorm gieten; $q \cdot 7 = (q - 3) + \cdots + (q + 3)$ voor alle $q \geq 4$. In het algemeen kunnen we $q \cdot (2k + 1)$ voor $q \geq k + 1$ schrijven als $(q - k) + \cdots + (q + k)$, want dat zijn $2k + 1$ opeenvolgende getallen met q als gemiddelde en volgens de formule is hun som dan $q \cdot (2k + 1)$. Nu zien we dat ook de grotere veelvouden $(k + 1) \cdot (2k + 1), (k + 2) \cdot (2k + 1)$, enzovoorts, van $2k + 1$ reekssommen zijn.

Laten we even terugkijken op wat we nu gedaan hebben. Het patroon dat we in onze tabel zagen, bleek onderdeel te zijn van een veel groter patroon, waarmee we alle veelvouden van alle oneven getallen groter dan 1 kunnen vinden in de tabel (als we ons inbeelden dat we de tabel met reekssommen oneindig groot kunnen maken). We concluderen dat alle getallen die geen tweemacht zijn, reekssommen zijn. Hiermee hebben we deel b van de opgave bewezen.

TOT SLOT Wil je meer van dit soort opgaven maken? Als je op de middelbare school zit, doe dan mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade op vrijdagmiddag 4 februari 2011. Vraag je wiskundedocent om meer informatie. Verder kun je ook de site van de Wiskunde Olympiade bezoeken: www.wiskundeolympiade.nl. Op die site staan heel veel oude opgaven van alle rondes van de olympiade in Nederland.

AANTAL MANIEREN TELLEN

In dit artikel hebben we een bijzondere eigenschap van de positieve gehele getallen ontdekt, namelijk dat elk positief geheel getal ofwel een reekssom ofwel een tweemacht is, maar niet allebei. Nu we dit weten, kunnen we ons afvragen op hoeveel manieren getallen die geen tweemacht zijn, te schrijven zijn als $m + \cdots + n$ (met $n > m$). In de tabel op pagina 28 valt direct op dat het getal 3 maar één keer voorkomt en 35 juist meerdere keren. Waar hangt dat precies van af?



De hele tafel van 7 komen we in de tabel tegen door vanaf 7 eerst schuin omhoog te lopen, dan bovenaan een vakje naar rechts te gaan en vervolgens weer schuin omlaag te lopen. Dit is het rood gekleurde patroon in de tabel. Kleur nu hetzelfde patroon voor de veelvouden van 3 blauw. Start dus vanaf de 3 met een stap naar rechts en ga vervolgens schuin naar beneden. (De overige 3-vouden in de tabel kleuren we niet blauw.) Kleur het patroon van de 5-vouden geel, het patroon van de 9-vouden paars, enzovoorts. Nu zie je dat op deze manier de hele tabel ingekleurd wordt, elk hokje precies één keer.

Als we van een zeker positief geheel getal r dat geen tweemacht is willen weten op hoeveel manieren het te schrijven is als $m + \cdots + n$, dan kunnen we dus gewoon kijken op hoeveel plekken r voorkomt in ons patroon. Neem bijvoorbeeld $r = 35$. Dat is een 5-voud, dus we vinden hem terug in het gele patroon van de 5-vouden. Maar het is ook een 7-voud, dus hij zit ook in het rode patroon van de 7-vouden. Ook is het een 35-voud, dus zit hij ook in het patroon van de 35-vouden, dat overigens nu niet te zien is in de tabel. Deze plekken waar 35 in de tabel staat komen, op de volgorde waarin ze genoemd zijn, overeen met de schrijfwijzen $5 + 6 + 7 + 8 + 9$ en $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ en $17 + 18$.

In het algemeen vinden we r precies in ons patroon als r een veelvoud is van een of ander oneven getal groter dan 1. Het aantal plekken waarop r voorkomt in ons patroon is dan ook het aantal oneven delers groter dan 1 van r. Dat is dus het aantal manieren waarop r te schrijven is als $m + \cdots + n$.

Ten slotte valt het op dat dit ook klopt voor tweemachten, want tweemachten hebben geen oneven delers groter dan 1. Dus het is voor alle getallen waar dat het aantal manieren waarop ze te schrijven zijn als $m + \cdots + n$ gelijk is aan het aantal oneven delers groter dan 1. ■